CLASA a 11-a

1. Fie n un număr natural nenul şi $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 = I_n$, $B^2 = 2I_n$ şi $AB = BA$. Arătaţi că, dacă a, b sunt numere întregi, nu ambele nule, atunci matricea $aA + bB$ este inversabilă.

***

Soluţie. Fie $C = aA + bB$. Atunci $(C - aA)^2 = 2b^2 I_2$, deci $C^2 - 2aAC = (2b^2 - a^2)I_2$ ... **3p**
Egalitatea $2b^2 - a^2 = 0$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$ este posibilă doar dacă $a = b = 0$ **2p**
Deducem astfel $\det C \det(C - 2A) \neq 0$, de unde concluzia **2p**

2. Fie ABC un triunghi în plan, având vârfurile de coordonatele întregi, aria S şi care verifică relaţia $(AB + AC)^2 < 8S + 1$. Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

***

Soluţie. Avem $(AB + AC)^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \geqslant AB^2 + AC^2 + 4S$ iar numerele $AB^2 + AC^2 + 4S$ şi $8S + 1$ sunt întregi, deci $AB^2 + AC^2 + 4S \leqslant 8S$ **3p**
Rezultă $AB^2 + AC^2 \leqslant 4S \leqslant 2AB \cdot AC$, de unde $AB = AC$ **2p**
În plus, ipoteza duce la $2S \geqslant AB \cdot AC$, ceea ce implică $\sin A \geqslant 1$, de unde $A = \pi/2$ **2p**

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ şi d_n cel mai mare divizor comun al elementelor matricei $A^n - I_2$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \infty$.

***

Soluţie. Avem $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 2b_n & a_n \end{pmatrix}$ **2p**
Apoi $a_n^2 - 2b_n^2 = (\det A)^n = 1$, deci $(a_n - 1)(a_n + 1) = 2b_n^2$ **2p**
Cum $(a_n - 1, a_n + 1)$ este 1 sau 2, deducem că $a_n - 1$ sau $(a_n - 1)/2$ este un pătrat perfect p_n şi $p_n | a_n - 1, p_n | b_n$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, reiese $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \infty$ **3p**

4. Vom spune că un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este de tip *zero plus* dacă are termeni strict pozitivi şi limita 0.

a) Arătaţi că, dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este de tip zero plus şi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcţie bijectivă, atunci şirul $(x_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ are limita 0.

b) Arătaţi că, dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este de tip zero plus, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcţie bijectivă, iar şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $y_n = \dfrac{x_{f(n)}}{x_n}$ are limită, atunci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita 1.

c) Daţi un exemplu de şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tip zero plus şi de funcţie bijectivă $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, astfel încât şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $y_n = \dfrac{x_{f(n)}}{x_n}$ să nu aibă limită.

Mihail Bălună

Soluţie. a) În afara oricărei vecinătăţi a lui 0 se află acelaşi număr de termeni ai şirului $x_{f(n)}$ ca ai şirului x_n, deci un număr finit **2p**

b) Cu raţionamentul de mai sus, este suficient să arătăm că $y_{u(n)} \to 1$ pentru o bijecţie $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Definim u astfel încât $(x_{u(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ să fie descrescător. Avem următoarea lemă.

Lemă. *Dacă $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o bijecţie, atunci mulţimile $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) \geqslant n\}$ şi $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) \leqslant n\}$ sunt infinite.*

Într-adevăr, dacă am avea $A = \{n_1, \ldots, n_k\}$ şi $m > \varphi(n_i)$, $i = \overline{1,k}$, atunci mulţimea cu $m + 1$ elemente distincte $\{\varphi(0), \ldots, \varphi(m)\}$ ar fi inclusă în mulţimea $\{0, \ldots, m - 1\}$ – imposibil. Analog reiese că presupunerea că B este mulţime finită duce la o contradicţie. □

Folosind lema deducem că şirul $(y_{u(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ are un subşir cu termeni $\geqslant 1$ (pentru indicii la care $u(f(n)) \geqslant n$) şi un subşir cu termeni $\leqslant 1$ (pentru $u(f(n)) \leqslant n$), de unde concluzia **3p**

c) Dacă $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ şi $f(n) = n + 1$ dacă n este par, $f(n) = n - 1$ dacă n este impar, atunci $\dfrac{x_{f(n)}}{x_n}$ este alternativ 2 şi $\dfrac{1}{2}$, deci nu are limită **2p**